МАТ „В"

Q 1 Квадратната функция, която приема стойност 41 за $x = -2$, стойност 20 за $x = 5$ и се минимизира за $x = 2$, е

$$y = \boxed{\mathsf{A}}\, x^2 - \boxed{\mathsf{B}}\, x + \boxed{\mathsf{C}}\, .$$

Минималната стойност на тази функция е $\boxed{\mathsf{D}}$.

Q 2 Да разгледаме полиномната функция на x

$$P = x^3 + x^2 + ax + 1,$$

където a е рационално число.

За $a = \boxed{\mathsf{A}}$ стойността на P е рационално число за всяко x, което удовлетворява уравнението $x^2 + 2x - 2 = 0$, и в този случай стойността на P е $\boxed{\mathsf{B}}$.

Q 3 За всяко от $\boxed{\mathsf{A}} \sim \boxed{\mathsf{D}}$ в следните твърдения, изберете най-подходящия израз измежду ⓪ ~ ⑨ по-долу.

Да разгледаме двете условия $x^2 - 3x - 10 < 0$ и $|x - 2| < a$ за реалното число x, където a е положително реално число.

(i) Необходимо и достатъчно условие за $x^2 - 3x - 10 < 0$ е $\boxed{\mathsf{A}} < x < \boxed{\mathsf{B}}$.

(ii) Стойностите на a, за които $|x - 2| < a$ е необходимо условие за $x^2 - 3x - 10 < 0$, удовлетворяват условието $\boxed{\mathsf{C}}$.

(iii) Стойностите на a, за които $|x - 2| < a$ е достатъчно условие за $x^2 - 3x - 10 < 0$, удовлетворяват условието $\boxed{\mathsf{D}}$.

⓪ 2	① 5	② -2	③ -5
④ $a \geq 2$	⑤ $a \geq 3$	⑥ $a \geq 4$	
⑦ $0 < a \leq 2$	⑧ $0 < a \leq 3$	⑨ $0 < a \leq 5$	

Q 4 Нека d е разликата на аритметичната прогресия $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, която удовлетворява двете условия

$$a_5 a_7 - a_4 a_9 = 60, \quad a_{11} = 25.$$

Тогава

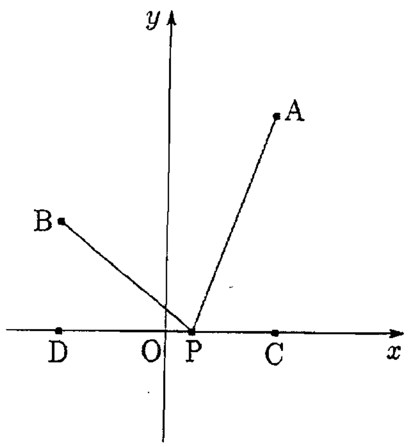
(1) Или $d = \boxed{\mathsf{A}}$ или $d = \boxed{\mathsf{B}}$, където $\boxed{\mathsf{A}} > \boxed{\mathsf{B}}$.

(2) Ако $d = \boxed{\mathsf{A}}$, то $a_1 = \boxed{\mathsf{C}}$, $a_n = \boxed{\mathsf{D}}\, n - \boxed{\mathsf{E}}$, и сумата на първите n члена на прогресията е 195 за $n = \boxed{\mathsf{F}}$.

Q 5 Да разгледаме четирите точки

A(1, 2), B(−1, 1), C(1, 0), D(−1, 0)

в равнината xy. Нека P е точка върху отсечката CD, изключвайки крайните точки. Трябва да намерим точката P така, че ъгълът $\angle$APB да е максимален.



Нека $\alpha = \angle \mathrm{APC}$, $\beta = \angle \mathrm{BPD}$ и $\theta = \angle \mathrm{APB}$. Нека t е x-координатата на точката P. Тогава

$$\tan\alpha = \frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}} - t}, \quad \tan\beta = \frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}} + t}$$

и следователно

$$\tan\theta = \frac{t + \boxed{\mathsf{E}}}{t^2 + \boxed{\mathsf{F}}}.$$

Когато диференцираме дясната страна на това уравнение относно t, получаваме

$$\left(\frac{t + \boxed{\mathsf{E}}}{t^2 + \boxed{\mathsf{F}}}\right)' = -\frac{t^2 + \boxed{\mathsf{G}}\, t - 1}{\left(t^2 + \boxed{\mathsf{H}}\right)^2}.$$

Следователно координатите на точката P са

$$\left(\boxed{\mathsf{I}}, 0\right).$$

Q 6 Нека α е реално число. Да транслираме графиката на кубичната функция

$$y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

така, че точката $(\alpha, f(\alpha))$ от графиката на ① да отиде в началото $(0, 0)$, и да изразим функцията на транслираната графика чрез $f'(\alpha)$ и $f''(\alpha)$.

Най-напред, имаме

$$f'(\alpha) = \boxed{\mathsf{A}}\,\alpha^2 + \boxed{\mathsf{B}}\,a\alpha + b \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

$$f''(\alpha) = \boxed{\mathsf{C}}\,\alpha + \boxed{\mathsf{D}}\,a. \qquad \cdots\cdots \quad ③$$

След това, разглеждаме транслацията, която изпраща точката $(\alpha, f(\alpha))$ от графиката на ① в началото, т.е. заместваме x с $x + \alpha$ и y с $y + f(\alpha)$ в ① и, използвайки ② и ③, получаваме израза

$$y = x^3 + \frac{f''(\alpha)}{\boxed{\mathsf{E}}}x^2 + f'(\alpha)x.$$

Например, да разгледаме функцията

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 68. \qquad \cdots\cdots \quad ④$$

Тъй като

$$f'\left(\boxed{\mathsf{F}}\right) = 0 \quad \text{и} \quad f''\left(\boxed{\mathsf{G}}\right) = 0,$$

виждаме, че когато транслираме графиката на ④ така, че точката $\left(\boxed{\mathsf{H}}, \boxed{\mathsf{I}}\right)$ на графиката е преместена в началото, ние получаваме графиката на $y = x^3$.

Q 7 Да разгледаме кривата $y = 2\log x$, където $\log$ е натуралният логаритъм. Нека ℓ е минаващата през началото допирателна към тази крива, нека P е точката на допиране на ℓ към кривата, и нека m е правата през P, която е перпендикулярна към допирателната ℓ. Трябва да намерим уравненията на правите ℓ и m и лицето S на областта, ограничена от кривата $y = 2\log x$, правата m и оста x.

Нека t е x-координатата на точката P. Тогава t удовлетворява $\log t = \boxed{\text{A}}$. Следователно, уравнението за ℓ е

$$y = \frac{\boxed{\text{B}}}{e}x.$$

Уравнението за m е

$$y = -\frac{e}{\boxed{\text{C}}}x + \frac{e^2}{\boxed{\text{D}}} + \boxed{\text{E}}.$$

Така, лицето S на областта е

$$S = \boxed{\text{F}} + \frac{\boxed{\text{G}}}{e}.$$