МАТЕМАТИКА А

Q 1 За дадена константа k, да разгледаме полиномната функция y на t:

$$y = t(t+1)(t-2)(t-3) + kt(t-2).$$

(1) Да положим $x = t^2 - 2t$. Тогава y може да се изрази като квадратна функция на x

$$y = x^2 + \left(k - \boxed{\mathsf{A}}\right)x, \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

и стойностите, които може да приема x са

$$x \geq \boxed{\mathsf{B}}. \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

(2) Искаме да намерим най-малката стойност на y в ①, когато x пробягва множеството от значения от ②. Допълвайки до точен квадрат, ① преминава в

$$y = \left(x + \frac{k - \boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}\right)^2 - \left(\frac{k - \boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}\right)^2.$$

Тогава, ако означим най-малката стойност на y с m, получаваме резултата

$$\text{ако } k \leq \boxed{\mathsf{G}}, \text{ то } m = -\left(\frac{k - \boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}\right)^2,$$

$$\text{ако } k > \boxed{\mathsf{G}}, \text{ то } m = \boxed{\mathsf{J}} - k.$$

Q 2 Отговорете на всеки от следните въпроси:

(1) Стойностите на a такива, че $|x - a| < 3$ за всички стойности на x, удовлетворяващи $0 \leq x < 2$, са $\boxed{\mathsf{A}} \leq a < \boxed{\mathsf{B}}$.

(2) Стойностите на a такива, че $|x - a| < 3$ за някоя стойност на x, удовлетворяваща $0 \leq x < 2$, са $\boxed{\mathsf{C}} < a < \boxed{\mathsf{D}}$.

Q 3 Имаме три топки с различни размери и четири кутии с различен цвят. Ако топките се сложат в кутиите по случаен начин, то има $\boxed{\mathsf{A}}$ възможни резултата.

(1) Вероятността точно три кутии да са празни е $\boxed{\mathsf{B}}$.

(2) Вероятността точно една кутия да е празна е $\boxed{\mathsf{C}}$.

(3) Вероятността точно две кутии да са празни е $\boxed{\mathsf{D}}$.

(4) Математическото очакване на броя на кутиите, които не са празни, е $\boxed{\mathsf{E}}$.

Q 4 Нека p и q са две ненулеви цели числа. Искаме да намерим стойностите на p и q, за които стойностите на x, удовлетворяващи неравенството

$$p(x+4q)+q(3x-p)>0$$

са $x<-3$.

Тъй като горното неравенство може да се трансформира в

$$\left(p+\boxed{\mathsf{A}}\,q\right)x>\boxed{\mathsf{B}}\,pq,$$

p и q удовлетворяват

$$p+\boxed{\mathsf{A}}\,q<\boxed{\mathsf{C}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

и

$$pq-p-\boxed{\mathsf{D}}\,q=0. \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

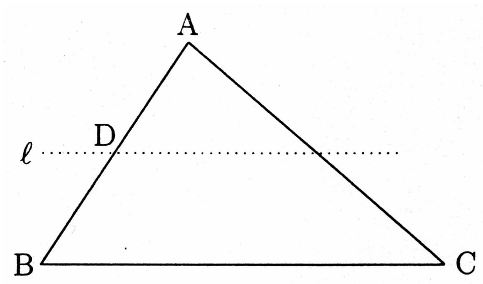
По-нататък, ② може да се трансформира в

$$\left(p-\boxed{\mathsf{E}}\right)\left(q-\boxed{\mathsf{F}}\right)=\boxed{\mathsf{G}}.$$

Така, от факта, че и двете числа p и q са цели и от ①, получаваме

$$p=\boxed{\mathsf{H}}, \quad q=\boxed{\mathsf{I}}.$$

Q 5 Имаме лист хартия с формата на остроъгълен триъгълник ABC. Искаме да прекараме права линия ℓ, успоредна на страната BC, и да прегънем хартията по тази линия. Как трябва да прекараме правата ℓ така, че да максимизираме лицето на застъпващата се част от триъгълника?



Нека $c = AB$ и нека S е лицето на триъгълника ABC. Нека D е пресечната точка на страната AB и на ℓ, и нека $x = AD$. Нека $f(x)$ е лицето на застъпващата се част от триъгълника. Виждаме, че

$$\text{ако} \quad x \leq \frac{1}{2}c, \quad \text{то} \quad f(x) = \left(\frac{x}{c}\right)^{\boxed{\mathsf{A}}} S$$

$$\text{ако} \quad x > \frac{1}{2}c, \quad \text{то} \quad f(x) = \frac{\boxed{\mathsf{B}}\, x^2 + \boxed{\mathsf{C}}\, cx - c^2}{c^2} S$$

$$= \frac{\boxed{\mathsf{D}}}{c^2} \left\{ \left(x - \boxed{\mathsf{E}}\, c\right)^2 - \frac{c^2}{\boxed{\mathsf{F}}} \right\} S.$$

Следователно, $f(x)$ се максимизира за $x = \boxed{\mathsf{G}}\, c$.

Следователно, трябва да прекараме правата ℓ така, че да минава през точката, деляща вътрешно страната AB в отношение $\boxed{\mathsf{H}} : \boxed{\mathsf{I}}$.

Q 6 Дадени са правилен шестоъгълник A и правилен осмоъгълник B. Дължините на периметрите на A и B са означени с L_A и L_B. Лицата на A и B са означени с S_A и S_B.

(1) Ако A и B са вписани в окръжност с радиус r, то

$$L_A = \boxed{\mathsf{A}}\, r, \quad S_A = \boxed{\mathsf{B}}\, r^2.$$

Нека ℓ е дължината на страната на B. Тъй като

$$L_B^2 = \boxed{\mathsf{C}}\, \ell^2,$$

имаме

$$L_B^2 = \boxed{\mathsf{D}}\, r^2, \quad S_B = \boxed{\mathsf{E}}\, r^2.$$

(2) Ако $L_A = L_B$, то

$$\frac{S_A}{S_B} = \boxed{\mathsf{F}}\,.$$