МАТЕМАТИКА B

Q 1 За дадена константа k, да разгледаме полиномната функция y на t:

$$y = t(t+1)(t-2)(t-3) + kt(t-2).$$

(1) Да положим $x = t^2 - 2t$. Тогава y може да се изрази като квадратна функция на x

$$y = x^2 + \left(k - \boxed{\mathsf{A}}\right)x, \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

и стойностите, които може да приема x са

$$x \geq \boxed{\mathsf{B}}. \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

(2) Искаме да намерим най-малката стойност на y в ①, когато x пробягва множеството от значения от ②. Допълвайки до точен квадрат, ① преминава в

$$y = \left(x + \frac{k - \boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}\right)^2 - \left(\frac{k - \boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}\right)^2.$$

Тогава, ако означим най-малката стойност на y с m, получаваме резултата

$$\text{ако } k \leq \boxed{\mathsf{G}}, \text{ то } m = -\left(\frac{k - \boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}\right)^2,$$

$$\text{ако } k > \boxed{\mathsf{G}}, \text{ то } m = \boxed{\mathsf{J}} - k.$$

Q 2 Отговорете на всеки от следните въпроси:

(1) Стойностите на a такива, че $|x - a| < 3$ за всички стойности на x, удовлетворяващи $0 \leq x < 2$, са $\boxed{\mathsf{A}} \leq a < \boxed{\mathsf{B}}$.

(2) Стойностите на a такива, че $|x - a| < 3$ за някоя стойност на x, удовлетворяваща $0 \leq x < 2$, са $\boxed{\mathsf{C}} < a < \boxed{\mathsf{D}}$.

Q 3 Нека d и r са цели числа и нека x е положително число. Нека a и b са числа такива, че редицата a, x, b е аритметична прогресия с разлика d. Нека p и q са числа такива, че редицата p, x, q е геометрична прогресия с частно r. Освен това, нека са изпълнени следните три условия

$$a + x + b = pxq \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad ①$$

$$axb = p + x + q \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad ②$$

$$a > x > b \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad ③$$

При тези допускания, искаме да намерим стойностите на d, r и x.

Преди всичко, когато всяка от страните на ① се изрази чрез x, ① става

$$\boxed{\mathsf{A}}\, x = x^{\boxed{\mathsf{B}}}.$$

Тъй като x е положително число, ние получаваме $x = \boxed{\mathsf{C}}$.

След това, когато ② се изрази чрез d и r, получаваме

$$d^2 = -r + \boxed{\mathsf{D}} - \frac{\boxed{\mathsf{E}}}{r}.$$

Следователно, използвайки ③, ние получаваме $r = \boxed{\mathsf{F}}$ и $d = \boxed{\mathsf{G}}$.

Q 4 Да разгледаме правата ℓ и окръжността C, дефинирани чрез уравненията

$$\begin{aligned} \ell: &\quad x + 3y - 3 = 0 \\ C: &\quad x^2 + y^2 + 8y + 6 = 0. \end{aligned}$$

(1) Градиентът (ъгловият коефициент) на правата ℓ е $\boxed{\mathsf{A}}$. Координатите на центъра на окръжността C са $\left(\boxed{\mathsf{B}}, \boxed{\mathsf{C}}\right)$, а радиусът на окръжността C е $\boxed{\mathsf{D}}$.

(2) Когато точката P е взета върху правата ℓ, а точката Q е взета върху окръжността C така, че разстоянието между P и Q е минимално, то координатите на P и Q са съответно

$$\left(\boxed{\mathsf{E}}, \boxed{\mathsf{F}}\right) \quad \text{и} \quad \left(\boxed{\mathsf{G}}, \boxed{\mathsf{H}}\right),$$

а това минимално разстояние е $\boxed{\mathsf{I}}$.

Q 5 Нека $a < 0$. Да предположим, че в равнината xOy параболата $y = ax^2 + x + b$ се допира до правата $y = 2x + 1$.

(1) Условието параболата $y = ax^2+x+b$ да се допира до правата $y = 2x + 1$ е, че се удовлетворява равенството

$$ab - a = \boxed{\mathsf{A}}\,.$$

При това условие координатите на върха на $y = ax^2 + x + b$ са

$$\left(-\frac{1}{\boxed{\mathsf{B}}\,a},\ \boxed{\mathsf{C}}\right).$$

Следователно, условието оста на параболата да бъде вдясно от правата $x = 1$ е, че

$$a > -\frac{1}{\boxed{\mathsf{D}}}.$$

(2) Нека $a > -\dfrac{1}{\boxed{\mathsf{D}}}$. Когато лицето S на частта от равнината, ограничена от параболата $y = ax^2 + x + b$ и четирите прави $y = 2x + 1$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$, е представено чрез определен интеграл, имаме

$$S = -a\int_{-1}^{0}\left(x - \frac{1}{\boxed{\mathsf{E}}\,a}\right)^2 dx - a\int_{0}^{1}\left(x + \frac{1}{\boxed{\mathsf{F}}\,a}\right)^2 dx.$$

Пресмятайки този интеграл, получаваме

$$S = \boxed{\mathsf{G}}\,a - \frac{1}{\boxed{\mathsf{H}}\,a} - 1.$$

Q 6 Нека $a \neq 0$. Да разгледаме функцията на x

$$f(x) = (x - 3a)e^{-2x}.$$

(1) Имаме $f'(x) = \left(\boxed{\mathsf{A}}\, x + \boxed{\mathsf{B}}\, a + \boxed{\mathsf{C}} \right) e^{-2x}$.

(2) Искаме да намерим стойността на a такава, че през координатното начало можем да прекараме само една допирателна към графиката на $y = f(x)$.

Когато координатите на допирната точка са $(t, f(t))$, t удовлетворява

$$2t^2 - \boxed{\mathsf{D}}\, at - \boxed{\mathsf{E}}\, a = 0.$$

Следователно, от горното условие получаваме, че

$$a = \boxed{\mathsf{F}}\,.$$

(3) За $a = \boxed{\mathsf{F}}$, нека S е лицето на частта от равнината, ограничена от графиката на $y = f(x)$, оста x и оста y. Тогава имаме

$$S = \int_{\boxed{\mathsf{H}}}^{\boxed{\mathsf{G}}} \left(x + \boxed{\mathsf{I}} \right) e^{-2x} dx.$$

Пресмятайки този интеграл, получаваме

$$S = \frac{e^{\boxed{\mathsf{J}}} - \boxed{\mathsf{K}}}{\boxed{\mathsf{L}}}\,.$$