МАТЕМАТИКА (А) (2021)

Националност		No.	
Име	(Моля напишете пълното име с печатни букви, подчертайте фамилното име)		

Оценки	

1. Отговорете на следните въпроси и попълнете вашите отговори в съответните кутийки на листа с отговори.

(1) Да разгледаме уравнението $|x+1|+|x-2|=3x$. Тогава $x=$ [1-1].

(2) Нека $0 \leq \theta < 2\pi$. Да разгледаме неравенството $\sin 2\theta - 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 1 \geq 0$. Тогава значенията на θ, които удовлетворяват неравенството са [1-2] $\leq \theta \leq$ [1-3] или [1-4] $\leq \theta \leq$ [1-5], където [1-2] < [1-3] < [1-4] < [1-5] .

(3) Нека $x>0, y>0$. Тогава минималната стойност на $(x+y)(\frac{2}{x}+\frac{1}{2y})$ е [1-6] .

(4) Дадена е аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Ако $a_2+a_3+a_4=21$ и $a_3+a_4+a_5=30$, то n-тият член на прогресията се задава чрез

$$a_n = \boxed{[1\text{-}7]}\, n - \boxed{[1\text{-}8]} \quad (n = 1,2,\ldots).$$

(5) Второто най-малко естествено число, което дава остатъци 1, 1 и 2 при деление съответно на 2, 3 и 5, е [1-9].

(6) Дадено е естествено число. Когато го изразим в петична бройна система, то е трицифрено и цифрите пред 5^0 и 5^2 са съответно 2 и 3. Когато го изразим в седмична бройна система, то е отново трицифрено и цифрите пред 7^0 и 7^2 са съответно 5 и 1. Цифрата пред 7^1 в седмична система е с 3 по-голяма от цифрата на числото пред 5^1 в петична система. Когато изразим числото в десетична бройна система, то е [1-10].

(7) Пускаме 10 топки в 3 кутии. Разглеждаме броя на случаите по отношение на броя на топките във всяка кутия, като различаваме кутиите, но не различаваме топките. Ако е разрешено в някоя кутия да не попадне нито една топка, то броят на случаите е $\boxed{[1\text{-}11]}$. Ако трябва да има поне една топка във всяка кутия, то броят на случаите е $\boxed{[1\text{-}12]}$.

(8) Нека A е върхът на конус, а B и C са две различни точки върху окръжността на основата на конуса. Нека радиусът на основата е 3 и дължината на отсечката AB е 12. Да разгледаме път върху околната повърхнина на конуса, който започва от B, пресича AC и се връща в B. Дължината на най-късия път, отговарящ на тези условия е $\boxed{[1\text{-}13]}$.

2. Нека a е константа и нека функцията $f(x) = x^3 + (a-2)x^2 - 6ax + 8a$ има максимум за $x = a$. Отговорете на следните въпроси и запишете отговорите в съответните кутийки на листа с отговорите.

(1) $a =$ $\boxed{[2\text{-}1]}$ и $f(a) =$ $\boxed{[2\text{-}2]}$.

(2) Нека правата $y = 2x + k$ е допирателна към графиката на квадратната функция $y = f'(x)$, където k е константа. Тогава $k =$ $\boxed{[2\text{-}3]}$.

(3) Да разгледаме областта, ограничена от допирателната в точката $(a, f(a))$ към графиката $y = f(x)$ и от графиката $y = f(x)$. Тогава лицето на тази област е $\boxed{[2\text{-}4]}$.

3. За четириъгълника ABCD, вписан в окръжност, знаем, че $< \mathrm{ABD} =< \mathrm{CBD}$ и че дължините на страните AB и AD са съответно равни на 1 и 3, а $\cos < \mathrm{BAD} = -\frac{1}{3}$. Отговорете на следните въпроси и запишете отговорите в съответните кутийки на листа с отговорите. Отговорите трябва да са опростени колкото се може повече, а знаменателите на дробите трябва да са положителни цели числа.

(1) Дължината на страната BD е $\boxed{[3\text{-}1]}$.

(2) Радиусът на окръжността, описана около четириъгълника ABCD е $\boxed{[3\text{-}2]}$.

(3) Имаме $\cos < \mathrm{ABD} = \boxed{[3\text{-}3]}$.

(4) Имаме $\cos < \mathrm{BCD} = \boxed{[3\text{-}4]}$.

(5) Дължините на страните BC и CD са $\boxed{[3\text{-}5]}$ и $\boxed{[3\text{-}6]}$.