МАТЕМАТИКА (B) (2022)

Националност		No.	
Име	(Моля напишете пълното име с печатни букви, подчертайте фамилното име)		

Оценки	

Отговорете на следните въпроси и попълнете Вашите отговори в съответните кутийки на листа с отговори.

1. Запълнете празните кутийки с отговорите.

(1) В равнината xy са дадени две точки $P_1(0,2)$ и $P_2(4,1)$. За точката Q върху оста x дължината $P_1Q + QP_2$ има своя минимум, когато $Q = \left(\boxed{}, 0\right)$.

(2) Ако $\sin a = \frac{1}{4}$ и $4a + 2b = \pi$, то $\sin b = \boxed{}$.

(3) За положителните реални числа a и b с $a < b$, стойностите на x, за които

$a^3 \le a^{x+1}b^{2-x} \le b^3$, удовлетворяват $\boxed{①} \le x \le \boxed{②}$.

(4) Броят на двойките (x,y) от цели числа, удовлетворяващи неравенствата $x \ge 0$, $y \ge 0$ и $7x + 11y \le 77$ е $\boxed{}$.

(5) За функцията $f(x) = 3xe^x$ дефинираме

$$g_1(x) = \frac{d}{dx}f(x),$$

$$g_n(x) = \frac{d}{dx}g_{n-1}(x) \quad (n=2,3,4,\ldots).$$

Тогава $g_2 = 3e^x\left(\boxed{①}\right)$ и $g_n = 3e^x\left(\boxed{②}\right)$.

(6) Когато целите числа a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 удовлетворяват

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \ge 10,$$

$$a_1 \ge a_5 \text{ и } a_1 + a_2 \ge a_4 + a_5,$$

минималната стойност на $5a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 2a_4 + a_5$ е $\boxed{}$.

2. В тази задача ние пресмятаме

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{x}\right)\sin\frac{x}{n}}{\left(x^2+2x+\frac{3}{n}\right)^2}\right)dx$$

следвайки следните стъпки.

(1) Да разгледаме трите функции

$$t,\quad \sin t,\qquad t\cos t$$

и да ги наредим в растящ ред. Когато $0<t<\frac{\pi}{2}$,

$$\boxed{①\quad} < \boxed{②\quad} < \boxed{③\quad},$$

а когато $-\frac{\pi}{2}<t<0$,

$$\boxed{④\quad} < \boxed{⑤\quad} < \boxed{⑥\quad}.$$

(2) Използвайки (1), получаваме

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \boxed{\quad}.$$

(3) Прилагайки (2), пресмятаме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{x}\right)\sin\frac{x}{n}}{\left(x^2+2x+\frac{3}{n}\right)^2} = \frac{\boxed{①\quad}}{(x^2+2x)^2}.$$

Така получаваме

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{x}\right)\sin\frac{x}{n}}{\left(x^2+2x+\frac{3}{n}\right)^2}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\boxed{①\quad}}{(x^2+2x)^2}\,dx = \boxed{②\quad}.$$

3. Дадена е функцията $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (1-a)x^2 - 4ax + 1$, където a е реално число.

(1) Производната $f'(x)$ на $f(x)$ е

$$\boxed{①} \cdot x^2 + 2\left(\boxed{②}\right)x - \boxed{③}.$$

(2) Нека $a \neq -1$. *Критичните точки* на $f(x)$ (точките, в които $f'(x) = 0$) са

$$x = \boxed{①} \quad \text{и} \quad x = \boxed{②}.$$

Нека $x = x_0$ е критична точка на диференцируемата функция $g(x)$. Казваме, че $g(x)$ има *локален минимум* в $x = x_0$, ако $g'(x)$ сменя знака си от отрицателен към положителен, когато x расте. Аналогично, $g(x)$ има *локален максимум* в $x = x_0$, ако $g'(x)$ сменя знака си от положителен към отрицателен в точката. Ако $g'(x)$ не сменя знака си в $x = x_0$, т.е. ако $g(x)$ няма нито минимум, нито максимум в $x = x_0$, се казва, че $g(x)$ има *седловидна точка* (или *инфлексна точка*) в $x = x_0$.

(3) Ако $a > -1$, то $f(x)$ има локален минимум за $x = \boxed{①}$ и локален максимум за $x = \boxed{②}$.

(4) Когато $a > -1$, ако $c \leq x \leq d$ е най-големият възможен интервал такъв, че в него минималната и максималната стойности, споменати в (3) са абсолютни (или глобални), то $c = \boxed{①}$ и $d = \boxed{②}$.

(5) Сега да разгледаме случая $a = -1$. Тогава единствената критична точка на $f(x)$ е $x = \boxed{①}$. Това седловидна точка на $f(x)$ ли е? Отговорете с „Да“ или „Не“. $\boxed{②}$.